

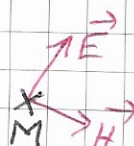


IV) Rayonnement en espace libre

a - Solution exacte

(i) Potentiels vecteur et scalaire

C57 - Problème de radiation



?

(ϵ_0, μ_0)

distribution de courant
connue

→ On veut résoudre

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \times \vec{E} = -j\omega \vec{B} \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + j\omega \vec{D} \end{cases}$$

C58 - Théorème de partition d'Helmholtz (TPH)

$$\forall \vec{U} \in \mathcal{F}(\vec{V}, W) / \vec{U} = \vec{\nabla} \times \vec{V} + \vec{\nabla} W$$

partie rotationnelle

partie irrotationnelle

Corollaire: Pour définir $\vec{U}$, il faut se donner $\vec{V}$ et W , ou bien, fixer:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{U} &= \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{V} + 0 \\ \text{et } \vec{\nabla} \cdot \vec{U} &= 0 + \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} W) \end{aligned}$$

"Tout champ est uniquement défini par la donnée de son rotationnel et sa divergence".



ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

C59 - Appliquons le TPH à $\vec{B} \Rightarrow \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} + \vec{\nabla} B_i$

Mais $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} B_i = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} B_i = 0$

$\Rightarrow \boxed{\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}}$ $\vec{A}$: potentiel vecteur

On travaille avec $\vec{A}$ désormais (chgt de var)

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -j\omega (\vec{\nabla} \times \vec{A})$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \times (\vec{E} + j\omega \vec{A}) = \vec{0}$$

TPH $\Rightarrow \exists \phi / \boxed{\vec{E} + j\omega \vec{A} = -\vec{\nabla} \phi}$ ϕ potentiel scalaire

* Rq1: Changement de variable:

$$\begin{cases} \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \\ \vec{E} = -\vec{\nabla} \phi - j\omega \vec{A} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{pmatrix}_{6 \text{ var}} \rightarrow \begin{pmatrix} \vec{A} \\ \phi \end{pmatrix}_{4 \text{ var}} \Rightarrow \text{plus simple}$$

* Rq2: Si $\omega \rightarrow 0$, $\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi$ $\phi \rightarrow$ potentiel électrostatique

(ii) Jauge de Lorentz

C60 - $\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + j\omega \epsilon_0 \vec{E}$

$$\Rightarrow \underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A}}_{\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \vec{\nabla}^2 \vec{A}} = \mu_0 \vec{J} - j\omega \epsilon_0 \mu_0 \vec{\nabla} \phi + \underbrace{\omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \vec{A}}_{\beta_0^2}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}^2 \vec{A} + \beta_0^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J} + \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + j\omega \epsilon_0 \mu_0 \phi)$$



ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

TPH $\Rightarrow \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ ne spécifie pas $\vec{A}$ de manière unique et on peut choisir $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$ comme on veut ("faire un choix de Jauge"). On prend

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = -j\omega \epsilon_0 \mu_0 \phi} \quad \text{jauge de Lorentz}$$

$$\Rightarrow \boxed{\nabla^2 \vec{A} + \beta_0^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}} \quad \text{équation de Helmholtz}$$

* Rq1: 3 équations découplées scalaires

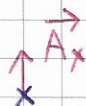
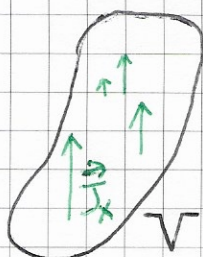
$$\nabla^2 \underset{\substack{\uparrow \\ z}}{A_x} + \beta_0^2 \underset{\substack{\uparrow \\ z}}{A_x} = -\mu_0 \underset{\substack{\uparrow \\ z}}{J_x}$$

* Rq2: Si on résout pour $\vec{A}$, on trouve ϕ , $\vec{E}$ et $\vec{H}$ via:

$$\begin{cases} \phi = \frac{1}{-j\omega \mu_0 \epsilon_0} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \\ \vec{E} = \frac{1}{j\omega \mu_0 \epsilon_0} \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - j\omega \vec{A} \\ \vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{A} \end{cases}$$

(iii) Fonction de Green

(61) J_x seul

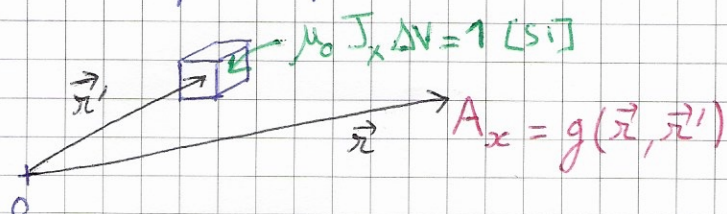


$$\nabla^2 A_x + \beta_0^2 A_x = -\mu_0 J_x \text{ est linéaire} \\ \Rightarrow \text{superposition}$$



ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

On découpe en petits volumes et on somme



fonction de Green $g(\vec{r}, \vec{r}') =$
 A_x en $\vec{r}$ dû à une source
unité en $\vec{r}'$

Linéarité :

$$\begin{aligned} \delta(\vec{r} - \vec{r}') &\longrightarrow g(\vec{r}, \vec{r}') \\ \mu_0 J_x(\vec{r}') \delta(\vec{r} - \vec{r}') &\longrightarrow \mu_0 J_x(\vec{r}') g(\vec{r}, \vec{r}') \\ \int_V d\vec{r}'^3 \mu_0 J_x(\vec{r}') &\longrightarrow A_x(\vec{r}) = \int_V d\vec{r}'^3 \mu_0 J_x(\vec{r}') g(\vec{r}, \vec{r}') \end{aligned}$$

si on connaît $g(\vec{r}, \vec{r}')$ le pb de radiation
est résolu!

$$g(\vec{r}, \vec{r}') \longrightarrow A_x \xrightarrow{\vec{r}} \vec{E}, \vec{H}$$

C62 - calcul de $g(\vec{r}, \vec{r}')$

invariance par translation de l'espace : $g(\vec{r}, \vec{r}') = g(\vec{r} - \vec{r}')$

$$\vec{r}_1 \stackrel{\text{def}}{=} \vec{r} - \vec{r}'$$

invariance par rotation : $g = g(|\vec{r}_1|) = g(r_1)$

Par définition, g satisfait $\nabla^2 g + \beta_0^2 g = -\delta(\vec{r} - \vec{r}') = -\delta(\vec{r}_1)$

Dans le repère sphérique de centre $\vec{r}'$, on a alors :

$$\underbrace{\frac{1}{r_1^2} \frac{d}{dr_1} \left[r_1^2 \frac{dg(r_1)}{dr_1} \right]}_{\text{équation (E)}} + \beta_0^2 g(r_1) = -\delta(r_1) = 0 \quad \text{pour } r_1 \neq 0$$



ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

$$\Rightarrow r_1 g(r_1) = C e^{\pm j\beta_0 r_1} \quad \text{signe } +(-) \Rightarrow \text{propagation vers/opposé à la source} \quad \text{causalité}$$

Constante C ?

On reporte $g(r_1) = C \frac{e^{-j\beta_0 r_1}}{r_1}$ dans (E), on intègre sur une sphère de rayon ε et on fait tendre ε vers 0*. On obtient

$$C = \frac{1}{4\pi} \Rightarrow g(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{e^{-j\beta_0 |\vec{r} - \vec{r}'|}}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|}$$

[* détails du calcul, omis en cours :

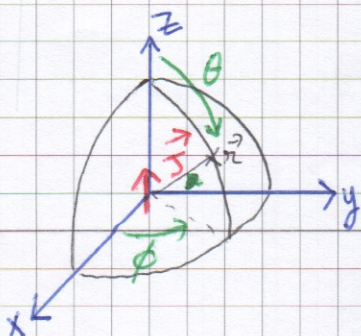
$$\int_{\mathcal{V}_\varepsilon} d^3\vec{r}_1 \frac{1}{r_1^2} \frac{d}{dr_1} \left[r_1^2 \frac{dg(r_1)}{dr_1} \right] + \int_{\mathcal{V}_\varepsilon} d^3\vec{r}_1 \beta_0^2 g(r_1) = - \int_{\mathcal{V}_\varepsilon} d^3\vec{r}_1 \delta(\vec{r}_1) = -1$$

$$\Rightarrow -1 = \int_0^\varepsilon 4\pi r_1^2 dr_1 \frac{1}{r_1^2} \frac{d}{dr_1} \left[r_1^2 \frac{d}{dr_1} \left(\frac{e^{-j\beta_0 r_1}}{r_1} \right) \right] + \int_0^\varepsilon 4\pi r_1^2 \beta_0^2 \frac{e^{-j\beta_0 r_1}}{r_1} dr_1 = -1$$

$$\Rightarrow -1 = 4\pi \left\{ \underbrace{\varepsilon^2 \left(-\frac{1}{\varepsilon^2} - \frac{j\beta_0}{\varepsilon} \right) e^{-j\beta_0 \varepsilon}}_{\substack{\downarrow [\varepsilon \rightarrow 0] \\ -1}} - 0 + \underbrace{e^{-j\beta_0 \varepsilon} (1 + j\beta_0 \varepsilon) - 1}_{\substack{\downarrow [\varepsilon \rightarrow 0] \\ 0}} \right\}$$

(iv) Dipole infinitesimal

C63



$$\vec{J}(\vec{r}') = \hat{z} I \Delta l \delta(\vec{r}') \quad \begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ A & m & 1/m^3 & \end{matrix} \quad \begin{matrix} [A/m^2] \\ \text{or} \end{matrix}$$

J_z seulement $\Rightarrow A_z$ seulement

$$A_z(\vec{r}) = \mu_0 \int d^3\vec{r}' J_z(\vec{r}') \frac{e^{-j\beta_0 |\vec{r} - \vec{r}'|}}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$= \frac{\mu_0 I \Delta l}{4\pi} \int d^3\vec{r}' \delta(\vec{r}') \frac{e^{-j\beta_0 |\vec{r} - \vec{r}'|}}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Rappel: $\forall f, \int_V \underbrace{dV}_{d^3\vec{r}} f(\vec{r}) d^3\vec{r} = f(0)$

$$\Rightarrow A_z(\vec{r}) = \mu_0 I \Delta l \frac{e^{-j\beta_0 r}}{4\pi r}$$

$$\Rightarrow \vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{I \Delta l}{4\pi} \vec{\nabla} \times \left(\frac{e^{-j\beta_0 r}}{r} \hat{z} \right)$$

$$\vec{\nabla} \times (f \vec{a}) = \vec{\nabla} f \times \vec{a} + f \vec{\nabla} \times \vec{a}$$

$$[\vec{a} = \hat{z}, \vec{\nabla} \times \hat{z} = 0]$$

$$\Rightarrow \vec{H} = \frac{I \Delta l}{4\pi} \vec{\nabla} \left(\frac{e^{-j\beta_0 r}}{r} \right) \times \hat{z} = \frac{I \Delta l}{4\pi} \left\{ \frac{1}{r^2} + \frac{j\beta_0}{r} \right\} \sin\theta e^{-j\beta_0 r} \hat{\phi}$$

champ proche

champ lointain

Calcul de ϕ et $\vec{E}$: exercice